STATISTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données.* Note (*) de M. **André Nataf**, présentée par M. Maurice Fréchet.

Le problème de la détermination des distributions de probabilités dont les lois marginales sont données a fait, à notre connaissance, l'objet de travaux de MM. Fréchet [(1), (2)], Gumbel (3), Parzen (4), Sklar (5). Fréchet, dans le cas de deux variables, a établi l'existence d'une infinité de lois à deux dimensions H (x, y) dont les distributions marginales coïncidaient avec deux fonctions de répartition en x et y respectivement données *a priori*. Il a notamment obtenu les bornes supérieure et inférieure en un point x_0, y_0 de H (x, y) en fonction simple des distributions marginales. Cependant il n'était pas donné de forme générale de H (x, y). Gumbel et Parzen ont donné quelques types de lois générales à deux dimensions (n dimensions aussi pour Gumbel) dépendant de paramètres.

Nous nous proposons de donner une forme très générale dans l'espace R^n des fonctions de répartitions totales $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont les marges sont des fonctions de répartition à une dimension données $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$, $\ldots$, $F_n(x_n)$ respectivement.

L'idée très simple qui nous guide est la suivante : étant données deux fonctions de répartition à une variable L (x) et M (ξ) données, on peut trouver une correspondance entre x et ξ qui conserve les probabilités : il suffit d'associer les valeurs de x et de ξ qui donnent la même valeur u comprise entre 0 et 1 à L (x) et M (ξ); ce qui est possible puisque ces valeurs sont uniques, les seules indéterminations se présentant étant relatives aux points de discontinuité de L ou M, ou à leurs paliers.

Donc

$$x = L^{-1}[M(\xi)]. \tag{1}$$

Si nous revenons maintenant aux n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nous allons commencer par considérer une distribution D finie quelconque de masses positives dans un espace $\xi_1, \ldots, \xi_n$, que nous normerons de façon que la masse totale soit égale à l'unité; à D correspondra donc une fonction de répartition $M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ dont on peut déduire des lois marginales $M_1(\xi_1)$, $M_2(\xi_2)$, $\ldots$, $M_n(\xi_n)$, telles que

$$M_j(\xi_j) = M(\max\xi_1, \ldots, \max\xi_{j-1}, \xi_j, \max\xi_{j+1}, \ldots, \max\xi_n)$$

De $M_j(\xi_j) = F_j(x_j)$ nous déduisons

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_1 = M_1^{-1}[F_1(x_1)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_j = M_j^{-1}[F_j(x_j)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_n = M_n^{-1}[F_n(x_n)]. \end{array}\right. \tag{2}$$

Dans ces conditions

$$M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = M[M_1^{-1} F_1(x_1), M_2^{-1} F_2(x_2), \ldots, M_n^{-1} F_n(x_n)]$$

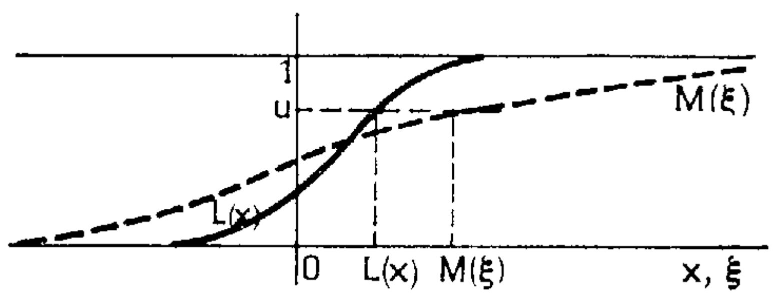
est une fonction de répartition en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont par exemple la loi marginale relative à x_1 est donnée par

$$M[M_1^{-1} F_1(x_1), M_2^{-1}(1), \ldots, M_n^{-1}(1)] = M_1[M_1^{-1} F_1(x_1)] = M_1(\xi_1) = F_1(x_1),$$

ce qui nous fait retrouver la loi marginale donnée *a priori*.

Cette méthode est évidemment générale puisque non seulement on obtient ainsi toujours une fonction de répartition convenable mais que de plus, si l'on considère une fonction de répartition convenable $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on pourra toujours lui faire correspondre une loi $M(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ du type D considéré d'où l'on déduira justement la loi $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

La méthode est particulièrement aisée, en vertu de la relation (1) lorsque l'on applique à des lois continues sans palier à partir de marges elles-mêmes



continues sans palier; il suffit de prendre pour D une distribution continue sans palier dans R^n, La méthode semble se prêter aussi à la recherche de conditions supplémentaires imposées aux liaisons entre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

L'esprit de la méthode permet d'étudier d'autres problèmes où les marges données sont d'une nature différente. Par exemple, en prenant le cas de R^3 pour fixer les idées, si l'on suppose données les distributions marginales d'une part à une dimension selon Oz et d'autre part à deux dimensions selon le plan xOy on voit qu'il suffit de se donner une distribution dans R^3 se projetant sur xOy selon la distribution donnée pour en déduire ensuite par un changement de variable selon Oz seul une distribution dont la projection sur Oz coïncide avec la distribution donnée.

Cette méthode est également vraisemblablement susceptible de généralisations au moins dans le cas les plus simples lorsque l'on remplace la connaissance des masses de la distribution contenues entre des plans parallèles aux plans de coordonnées, par des masses contenues à l'intérieur d'hypersurfaces emboîtées les unes dans les autres.

(*) Séance du 18 juin 1962.

[1] M. Fréchet, *Ann. Université de Lyon*, 14 A, 1951, p. 53-77.

[2] M. Fréchet, *Comptes rendus*, 242, 1956, p. 2426.

[3] Gumbel, *Comptes rendus*, 246, 1958, p. 2717.

[4] Parzen, *Modern Probability theory and its applications*, Wiley and Sons, New York-Londres, 1960, p. 278-279.

[5] Sklar, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 8, fasc. 3, 1959, p. 229-231.